UNIVERSITE MOHAMED I

Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques
Et Informatique, OUJDA

Année Universitaire 2007/08
Algèbre, SMPC, S_1

Feuille 2 d'exercices d'algèbre.
Polynômes, Fractions rationnelles et espaces vectoriels

EXERCICE I.

1. Soit le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.
   (a) Vérifier que $P(i) = 0$. Quelle est alors la relation entre $(X - i)$ et $P(X)$? De même entre $X^2 + 1$ et $P(X)$?
   (b) Donner l'ordre de multiplicité de chaque zéro de $P(X)$, et décomposer P sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

EXERCICE II.

1. Donner le $PGCD$ des polynômes $A(X) = 6X^5 + 7X^4 - 5X^3 - 2X^2 - X + 1$ et $B(X) = 6X^4 - 5X^3 - 19X^2 - 13X - 5$.
2. Trouver un couple de polynômes (U, V) tels que $UA + VB = PGCD(A, B)$.

EXERCICE III.

1. Donner la division euclidienne de X^4 par $X^2 + X + 1$. et déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^4}{(X^2 + X + 1)^3}$.
2. Donner deux polynômes U et V tels que $U(X^2 + X + 1) + V(X^2 + 1) = 1$. et déduire la Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle $G = \dfrac{3}{(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)}$.
3. Soit la fraction $H = \dfrac{X^2 + 1}{X^4 + X^2 + 1}$.
   (a) Montrer que $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.
   (b) Justifier l'écriture de F sous la forme $H = \dfrac{aX + b}{X^2 + X + 1} + \dfrac{cX + d}{X^2 - X + 1}$. Montrer que $a = -c$ et $b = d$ (H est paire). Calculer a, b, c et d.

EXERCICE IV.

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ xz = 0\}$. F est il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner-en une base.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$. est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Et donner sa dimension.
3. Montrer que $vect\{(1, 2, 1),\ (2, 1, 2)\} = vect\{(2, 7, 2),\ (3, 9, 3)\}$.

EXERCICE V. Soient $U = (1,\ 2,\ 3)$ et $V = (3,\ 2,\ 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour quelle condition un élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ est dans $vect\{U,\ V\}$?
2. Existe-il une base de $\mathbb{R}^3$ contenant $\{U,\ V\}$? Si oui completer $\{U,\ V\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE VI. Soient F, F' deux espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.

1. Montrer que l'intersection $F \cap F'$ et la somme $F + F'$ sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Donner un exemple tel que que la réunion $F \cup F'$ n'est pas un sous espace vectoriel de E.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F = vect\{(1,\ 2,\ -1),\ (2,\ -3,\ 2)\}$ et $F' = vect\{(4,\ 1,\ 3),\ (-3,\ 1,\ 2)\}$
   (a) Calculer $dim(F)$ et $dim(F')$. F et F' sont-ils identiques?
   (b) Déterminer une base de $F \cap F'$.
   (c) Déterminer une base de $F + F'$.
   (d) Est ce que la somme $F + F'$ est une somme directe?

EXERCICE VII .

1. Décomposer sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{(X^4-1)^2}$. (indication on remarquera que F est paire et réelle, en déduire des relations sur les coefficients)
2. Même question pour $G = \dfrac{X^2+2X+5}{(X^2-3X+2}$.
3. Donner la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, de $F = \dfrac{X^2-3}{X(X^2-1)(X^2+1)}$, $G = \dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)}$, $H = \dfrac{X^5+X^4-14X^3+31X^2-5X-50}{(X+1)(X+3)(X-2)}$ et $K = \dfrac{X}{(X-2)^5(X-1)}$.